

# О ДЕФЕКТНЫХ ЧИСЛАХ ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДЁННЫХ БЕСКОНЕЧНЫМИ ЯКОБИЕВЫМИ МАТРИЦАМИ

И.Н.Бройтигам, К.А.Мирзоев<sup>1</sup>

**1. Введение.** Пусть  $\mathbb{C}^m (m \geq 1)$  - евклидово  $m$  - мерное пространство вектор-столбцов со стандартным скалярным произведением  $y^*x = \sum_{j=1}^m x_j \overline{y_j}$ , где комплексные числа  $x_j, y_j (j = 1, \dots, m)$  - координаты векторов  $x$  и  $y$  соответственно, а  $*$  означает комплексно-сопряжённую матрицу. Пусть далее  $A_j, B_j (j = 0, 1, \dots)$  - квадратные матрицы порядка  $m$ , элементы которых являются комплексными числами, причём  $A_j$  - самосопряжённые матрицы и  $B_j^{-1}$  существуют. Рассмотрим бесконечную яковиеву матрицу с матричными элементами

$$\mathbf{J} := \begin{pmatrix} A_0 & B_0 & O & O & \dots \\ B_0^* & A_1 & B_1 & O & \dots \\ O & B_1^* & A_2 & B_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $O$  - нулевая матрица порядка  $m$ . Обозначим через  $l_m^2$  гильбертово пространство бесконечных последовательностей  $u = (u_0, u_1, \dots)$ ,  $u_j \in \mathbb{C}^m$ , со скалярным произведением  $(u, v) = \sum_{j=0}^{+\infty} v_j^* u_j$ . На всюду плотном в  $l_m^2$  линейном многообразии финитных векторов отображение  $u \rightarrow \mathbf{J}u$  определяет линейный симметрический, но незамкнутый оператор. Символами  $L$  и  $D_L$  обозначим замыкание этого оператора и его область определения. Для  $u \in D_L$  оператор  $L$  определяется формулой  $Lu = lu$ , где  $lu = ((lu)_0, (lu)_1, \dots)$  и

$$(lu)_0 := A_0 u_0 + B_0 u_1, \quad (lu)_j := B_{j-1}^* u_{j-1} + A_j u_j + B_j u_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

и является минимальным замкнутым симметрическим оператором, порождённым выражением  $lu$  в пространстве  $l_m^2$ .

Подпространства  $\mathfrak{N}_- := \{u \in l_m^2 : L^*u = -iu\}$  и  $\mathfrak{N}_+ := \{u \in l_m^2 : L^*u = iu\}$  называются дефектными подпространствами (в точках  $z = -i$  и  $z = i$ ), числа  $n_- := \dim \mathfrak{N}_-$  и  $n_+ := \dim \mathfrak{N}_+$  - дефектными числами, а пара  $(n_-, n_+)$  - индексом дефекта оператора  $L$ . Дефектные числа удовлетворяют неравенствам  $0 \leq n_-, n_+ \leq m$  и при

---

<sup>1</sup>Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ и Германской службы академических обменов (DAAD) по программе "Михаил Ломоносов" (ref: 325-A/13/74976) и регионального общественного фонда содействия отечественной науке (грант по фундаментальным проблемам физики и математики), а второй автор поддержан РНФ (грант № 14-11-00754).

этом если одно из них максимально, то и другое также максимально (см. [1] - [4]). Известно, что для любой пары таких чисел  $(n_-, n_+)$  существует якобиевая матрица  $\mathbf{J}$  такая, что эта пара является индексом дефекта соответствующего симметрического оператора  $L$  (см. [5]).

М.Г.Крейном (см. [1],[2]) установлено, что всякой якобиевой матрице  $\mathbf{J}$  отвечает некоторая матричная степенная проблема моментов и эта проблема имеет единственное (нормированное в некотором смысле) решение в том и только в том случае, когда одно из чисел  $n_-$  или  $n_+$  равно нулю. Этот случай называется определённым случаем матричной проблемы моментов. Матричная проблема моментов называется вполне неопределённой, если  $n_- = n_+ = m$  (см.[1],[2]). В этом случае иногда говорят, что для матрицы  $\mathbf{J}$  (для выражения  $l$ ) имеет место вполне неопределённый случай.

В настоящей статье рассматриваются также бесконечные матрицы вида  $J_m := (c_{ij})$  с числовыми элементами  $c_{ij} \in \mathbb{C}$ , такими, что  $c_{ij} = \overline{c_{ji}}$ ,  $c_{ij} = 0$ , если  $|i - j| > m$  и  $c_{j,j+m} \neq 0$  ( $i, j = 0, 1, \dots$ ).  $J_m$  имеет, очевидно, тот же вид, что и  $\mathbf{J}$  (см.(1)) с матричными элементами  $A_j$  и  $B_j$  размерности  $m$ , но теперь  $B_j$  является нижней треугольной матрицей. В частности, при  $m = 1$  имеем  $J_1 = \mathbf{J}$ , где  $c_{jj} = A_j$  и  $c_{j,j+1} = B_j$ . Если при этом  $A_j, B_j \in \mathbb{R}$  и  $B_j > 0$ , то далее везде их будем обозначать символами  $a_j$  и  $b_j$  ( $j = 0, 1, \dots$ ) соответственно, а матрицу  $J_1$  - символом  $J$ . Отметим, что в этом случае речь идёт об определённости или неопределённости классической степенной проблемы моментов.

В данной работе исследуются вопросы максимальной, не максимальной и минимальности дефектных чисел оператора  $L$  в терминах элементов якобиевой матрицы  $\mathbf{J}$ . Особое внимание уделено вопросу об условиях на числа  $a_j$  и  $b_j$  обеспечивающих реализацию случая определённости классической степенной проблемы моментов.

**2. Предварительные сведения.** Перечислим основные известные факты используемые в дальнейшем. Справедлива следующая теорема (см. [6], [7])

**Теорема 1.** *Для матрицы  $\mathbf{J}$  имеет место вполне неопределённый случай тогда и только тогда, когда все решения векторного уравнения*

$$(lu)_j = zu_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

*при  $z = 0$  принадлежат пространству  $l_m^2$ .*

**Замечание.** В формулировке этой теоремы в [6] была допущена опечатка: нумерация условия (2) была указана, начиная с индекса  $j = 0$  вместо  $j = 1$ . Но доказательство в [6] проведено верно, в нём использовалась правильная нумерация и, кроме того, в формулировке этой теоремы в работе [7] (теорема 0.1) опечатки уже

нет. Воспринят опечатку за ошибку, автор работы [8] построил в §7 контрпример к теореме, которая получается из теоремы 1, если в условиях (2) нумерацию начинать с  $j = 0$ . Исходя из этого, он указал на неверность результатов работ [6] и [7], не заметив при этом, что в [7] теорема 1 уже сформулирована верно. Таким образом, пример из §7 работы [8], очевидно, не опровергает теоремы 1.

Рассмотрим уравнение (2) как матричное уравнение относительно неизвестной последовательности квадратных матриц  $u_j$  размерности  $m$  и обозначим через  $P_j(z)$  и  $Q_j(z)$  ( $z \in \mathbb{C}$ ) его решения, удовлетворяющие начальным условиям  $P_0(z) := I$ ,  $P_1(z) := B_0^{-1}(zI - A_0)$  и  $Q_0(z) := O$ ,  $Q_1(z) := B_0^{-1}$  соответственно. Функции  $P_j(z)$  и  $Q_j(z)$  являются многочленами  $j$ -го и  $j - 1$ -го порядка от комплексного переменного  $z$  с матричными коэффициентами и называются матричными многочленами первого и второго рода соответственно.

Справедлива формула Кристоффеля-Дарбу (см. [3], Гл. VII, §2, п.11)

$$(\bar{z} - z) \sum_{j=0}^n P_j^*(z) P_j(z) = P_{n+1}^*(z) B_n^* P_n(z) - P_n^*(z) B_n P_{n+1}(z), \quad (3)$$

В [6] установлено, что двойная последовательность

$$K_{ji} = Q_j(0) P_i^*(0) - P_j(0) Q_i^*(0), \quad i, j = 0, 1, \dots$$

удовлетворяет матричному уравнению (2) при  $z = 0$  по переменной  $j$  при фиксированном  $i$  и начальным условиям  $K_{ii} = 0$ ,  $K_{i+1,i} = B_i^{-1}$  и справедлива

**Теорема 2.** *Для того чтобы для матрицы  $\mathbf{J}$  имел место вполне неопределённый случай, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности отрезков натуральных чисел  $[n_k, m_k]$  таких, что  $m_k \leq n_{k+1} < m_{k+1}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), выполнялось условие*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left( \sum_{j=n_k}^{m_k} \sum_{i=n_k}^j \|K_{ji}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty,$$

где  $\|A\|$  означает норму матрицы  $A$ .

При  $m = 1$ , очевидно, теорема 2 является критерием неопределённости классической степенной проблемы моментов.

Сформулируем одну теорему, относящуюся к случаю, когда оператор  $L$  порождается якобиевой матрицей  $J_m$ .

**Теорема 3.** *Пусть*

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{\sqrt{c_{jj}^2 + 1}} \sum_{k=1}^m (|c_{j,j-k}| + |c_{j,j+k}|) < 1.$$

*Тогда оператор  $L$ , порождённый матрицей  $J_m$ , самосопряжён.*

Эта теорема является частным случаем теоремы 2.2 работы [7] (см. также [9]).

### 3. Максимальность и не максимальность дефектных чисел оператора $L$ .

Используя теорему 2 можно доказать, что справедливы следующие две теоремы.

**Теорема 4.** *Если*

$$\sum_{j,i=1}^{\infty} \|K_{ji}\| < \infty,$$

*то дефектные числа оператора  $L$  максимальны.*

**Теорема 5.** *Пусть при некотором  $j$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|K_{n+j,n}\| = \infty. \quad (4)$$

*Тогда дефектные числа оператора  $L$  не максимальны.*

Заметим, что матрица  $K_{ji}$  определяется из равенства

$$K_{ji} = K_{ji}^0 - \sum_{k=i}^j K_{jk}^0 A_k K_{ki}, \quad i = 0, 1, \dots, j = i + 1, i + 2, \dots,$$

где

$$K_{i+2s,i}^0 = 0 \text{ и } K_{i+2s+1,i}^0 = (-1)^s B_{i+2s}^{-1} B_{i+2s-1}^* B_{i+2s-2}^{-1} \dots B_{i+1}^* B_i^{-1}, s, i = 0, 1, \dots$$

Учтя формулы для  $K_{n+j,n}$  при  $j = 1, 2, \dots$  в (4), получим иерархию достаточных признаков не максимальности дефектных чисел оператора  $L$ . В частности, при  $j = 1$  и  $j = 2$  имеем

$$K_{n+1,n} = B_n^{-1}, \quad K_{n+2,n} = B_{n+1}^{-1} A_{n+1} B_n^{-1}$$

и поэтому справедливо

**Следствие 1.** *Пусть выполняется какое-либо из условий*

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \|B_n^{-1}\| = \infty, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \|B_{n+1}^{-1} A_{n+1} B_n^{-1}\| = \infty.$$

*Тогда дефектные числа оператора  $L$  не максимальны.*

При  $j = 3$  и  $j = 4$ , получим

$$K_{n+3,n} = -B_{n+2}^{-1} B_{n+1}^* B_n^{-1} + B_{n+2}^{-1} A_{n+2} B_{n+1}^{-1} A_{n+1} B_n^{-1},$$

$$K_{n+4,n} = B_{n+3}^{-1} B_{n+2}^* B_{n+1}^{-1} A_{n+1} B_n^{-1} + B_{n+3}^{-1} A_{n+3} B_{n+2}^{-1} B_{n+1}^* B_n^{-1} - B_{n+3}^{-1} A_{n+3} B_{n+2}^{-1} A_{n+2} B_{n+1}^{-1} A_{n+1} B_n^{-1}.$$

Используя далее теорему 5, можно доказать, что справедливы следствия 2 и 3:

**Следствие 2.** Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|B_{n+2}^{-1} B_{n+1}^* B_n^{-1}\| < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|B_{n+2}^{-1} A_{n+2} B_{n+1}^{-1} A_{n+1} B_n^{-1}\| = \infty.$$

Тогда дефектные числа оператора  $L$  не максимальны.

**Следствие 3.** Пусть один из следующих рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|B_{n+3}^{-1} B_{n+2}^* B_{n+1}^{-1} A_{n+1} B_n^{-1} + B_{n+3}^{-1} A_{n+3} B_{n+2}^{-1} B_{n+1}^* B_n^{-1}\|,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|B_{n+3}^{-1} A_{n+3} B_{n+2}^{-1} A_{n+2} B_{n+1}^{-1} A_{n+1} B_n^{-1}\|$$

сходится, а другой расходится. Тогда справедливо утверждение следствия 2.

Теорема 4 является, очевидно, признаком вполне неопределённости, а теорема 5 - признаком не вполне неопределённости якобиевой матрицы  $\mathbf{J}$ .

Отметим, что, в частности, при  $m = 1$  пункт а) следствия 1 - это известный признак Карлемана определённости классической степенной проблемы моментов ([3, гл. VII, §1, теорема 1.3]), а пункт б) - признак Денниса и Уолла ([10, гл. I, задача 2]).

**Пример 1.** Пусть  $1 \leq p \leq m-1$ ,  $J_p$  и  $J_m$  (см. п.1) - якобиевы матрицы с элементами  $c'_{ij}$  и  $c''_{ij}$  ( $i, j = 0, 1, \dots$ ) соответственно, ненулевые элементы которых определяются равенствами  $c'_{j,j+p} = c'_{j+p,j} = (j+1)^2$ ,  $c''_{j,j+m} = c''_{j+m,j} = 1$ . Применяя теорему 1 или 4, можно доказать, что индекс дефекта оператора  $L$ , порождённого матрицей  $J_p$  равен  $(p, p)$ , а  $J_m$  порождает, очевидно, самосопряжённый оператор в  $l_m^2$ . Поэтому индекс дефекта минимального оператора, порождённого суммой  $J_p + J_m$  ( $=: \mathbf{J}$ ) равен  $(p, p)$ .

Компоненты  $A_j$  и  $B_j^{-1}$  матрицы  $\mathbf{J}$  (см. (1)) из примера 1 являются матрицами размерности  $m$  с целочисленными элементами, следовательно, они удовлетворяют и условию а) и условию б) следствия 1. Таким образом, этот пример показывает, что при выполнении условий следствия 1 дефектные числа оператора  $L$  могут принимать любые (равные) значения между нулём и  $m-1$ .

**4. Самосопряжённость оператора  $L$ .** Известно несколько признаков самосопряжённости оператора  $L$ , порождённого якобиевой матрицей  $\mathbf{J}$  с матричными элементами (см., напр., [7], теорема 2.2). Как мы уже отмечали, в случае  $m = 1$  этот вопрос представляет особый интерес в связи с классической степенной проблемой моментов и при этом теорема 2 даёт, очевидно, необходимое и достаточное условие самосопряжённости оператора  $L$ , а теорема 5 демонстрирует эффективность этой теоремы. В недавней работе [11] получен ряд новых признаков определённости классической

степенной проблемы моментов. В этом пункте мы излагаем метод, позволяющий переносить часть результатов работы [11] на случай оператора  $L$ , порождённого матрицей  $\mathbf{J}$ . Замечательно то, что здесь речь идёт не о немаксимальности дефектных чисел оператора  $L$  как в теореме 5, а о новых признаках его самосопряжённости.

Пусть  $x \in \mathbb{C}^m$  и  $x \neq 0$ . Из формулы (3) можно извлечь (см. [3, Гл. VII, §2, п.11, доказательство теоремы 2.9.]), что справедливо неравенство

$$\frac{1}{\|B_n\|} \leq C \|P_{n+1}(i)x\| \|P_n(i)x\|, \quad (5)$$

где  $C = \|x\|^{-2}$ . С другой стороны, векторы  $P_n(i)x$  удовлетворяют уравнению (2) при  $z = i$ . Из этого и предположения о существовании матрицы  $A_n^{-1}$  легко получить, что

$$\|P_n(i)x\| \leq \|A_n^{-1}B_n\| \|P_{n+1}(i)x\| + \|A_n^{-1}B_{n-1}^*\| \|P_{n-1}(i)x\|, \quad (6)$$

отсюда

$$\|P_n(i)x\| \leq F_{1,n} (\|P_{n+1}(i)x\| + \|P_{n-1}(i)x\|), \text{ где } F_{1,n} = \|A_n^{-1}B_n\| + \|A_n^{-1}B_{n-1}^*\|.$$

Таким образом, применяя неравенство (5), получим

$$\frac{1}{\|B_n\|F_{1,n}} \leq C \|P_{n+1}(i)x\| (\|P_{n+1}(i)x\| + \|P_{n-1}(i)x\|). \quad (7)$$

Из неравенства (6) следует также, что

$$\|P_n(i)x\| \leq F_{2,n} (\|P_{n-2}(i)x\| + \|P_n(i)x\| + \|P_{n+2}(i)x\|),$$

где

$$F_{2,n} = \|A_n^{-1}B_{n-1}^*\| (\|A_{n-1}^{-1}B_{n-2}^*\| + \|A_{n-1}^{-1}B_{n-1}\|) + \|A_n^{-1}B_n\| (\|A_{n+1}^{-1}B_n^*\| + \|A_{n+1}^{-1}B_{n+1}\|).$$

Применяя снова (5), имеем

$$\frac{1}{\|B_n\|F_{2,n}} \leq C \|P_{n+1}(i)x\| (\|P_{n-2}(i)x\| + \|P_n(i)x\| + \|P_{n+2}(i)x\|). \quad (8)$$

Продолжая аналогичные рассуждения и учитывая неравенства (5), (7) и (8), получим, что справедливо

$$\frac{1}{\|B_n\|F_{q,n}} \leq C \|P_{n+1}(i)x\| \sum_{k=0}^q \|P_{n-q+2k}(i)x\|, \quad q = 0, 1, \dots, \quad (9)$$

где  $F_{0,n} = 1$ ,  $F_{1,n}$  и  $F_{2,n}$  указаны выше, а при  $q \geq 3$  выражения  $F_{q,n}$  громоздки, поэтому мы их не приводим, отметим лишь, что они также как  $F_{1,n}$  и  $F_{2,n}$  конструируются в соответствии с формулами, полученными в работе [11] при  $m = 1$ .

Исходя из неравенства (9) можно доказать, что справедлива теорема

**Теорема 6.** *Оператор  $L$ , порождённый якобиевой матрицей  $\mathbf{J}$  самосопряжён, если матричные элементы  $A_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) обратимы и для какого-либо  $q$  ( $q = 0, 1, \dots$ ) выполняется условие*

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{\|B_n\|F_{q,n}} = \infty. \quad (10)$$

При  $m = 1$  эта теорема совпадает с теоремой 4.3 работы [11] и обобщает её на случай  $m > 1$ . Отметим, что в случае  $m = 1$  условие а) следствия 1 и условие (10) при  $q = 0$  совпадают и являются признаком Карлемана самосопряжённости оператора  $L$ . Условие б) следствия 1 и условие (10) при  $q = 1$  близки, но не совпадают даже при  $m = 1$ .

**5. О степенях трёхдиагональных якобиевых матриц.** Пусть  $k \in \mathbb{N}$  и  $J$ , как и выше, - якобиевая матрица с элементами  $a_j$  и  $b_j$  ( $j = 0, 1, \dots$ ). Определим формальную степень порядка  $k$  матрицы  $J$ , полагая как обычно  $J^k = J(J^{k-1})$  и обозначим элементы этой матрицы символами  $c_{ij}^{(k)}$  ( $i, j = 0, 1, \dots$ ). Легко показать, что  $c_{ij}^{(k)} = c_{ji}^{(k)}$ ,  $c_{ij}^{(k)} = 0$ , если  $|i - j| > k$  и  $c_{j,j+k}^{(k)}$  отличен от нуля, т.е. согласно принятым во введении обозначениям, матрица  $J^k$  является бесконечной матрицей вида  $J_k$  и элементы  $c_{n,n+s}^{(k)}$  при  $k = 1, 2, \dots$ ,  $s = 0, 1, \dots, k$  и  $n = 0, 1, \dots$  определяются рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} c_{n,n}^{(1)} &= a_n, c_{n,n+1}^{(1)} = b_n, \\ c_{n,n+s}^{(k+1)} &= b_{n-1}c_{n-1,n+s}^{(k)} + a_n c_{n,n+s}^{(k)} + b_n c_{n+1,n+s}^{(k)}, s = 0, 1, \dots, k-1, \\ c_{n,n+k}^{(k+1)} &= a_n c_{n,n+k}^{(k)} + b_n c_{n+1,n+k}^{(k)}, c_{n,n+k+1}^{(k+1)} = b_n c_{n+1,n+k+1}^{(k)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Применяя теорему 1, можно доказать, что справедлива следующая

**Теорема 7.** *Для якобиевой матрицы  $J$  имеет место неопределённый случай тогда и только тогда, когда для матрицы  $J^k$  имеет место вполне неопределённый случай.*

Таким образом, для классической степенной проблемы моментов имеет место определённый случай тогда и только тогда, когда индексы дефекта минимального оператора  $L(= L_k)$ , порождённого матрицей  $J^k$  не максимальны. В частности, если оператор  $L_k$  самосопряжён, то оператор  $L$ , порождённый матрицей  $J$  тоже является таковым. Используя это и применив теорему 3 можно доказать, что справедлива следующая теорема

**Теорема 8.** *Пусть  $J$  - якобиевая матрица,  $k \in \mathbb{N}$  и  $c_{n,n+j}^{(k)}$ , ( $0 \leq j \leq k$ ) - последовательность чисел, определяемая равенствами (11). Тогда, если*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{|c_{nn}^{(k)}|^2 + 1}} \sum_{j=1}^k \left( |c_{n,n-j}^{(k)}| + |c_{n,n+j}^{(k)}| \right) < 1,$$

то оператор  $L$ , порождённый матрицей  $J$  самосопряжён.

Полагая  $k = 2$ , получаем следующее следствие из теоремы 8.

**Следствие 4.** Пусть  $J$  - якобиевая матрица. Тогда если

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-1}b_{n-2} + |a_{n-1} + a_n|b_{n-1} + |a_n + a_{n+1}|b_n + b_nb_{n+1}}{b_{n-1}^2 + a_n^2 + b_n^2} < 1, \quad (12)$$

то оператор  $L$ , порождённый матрицей  $J$  самосопряжён.

В заключении приведём один пример на применение следствия 4, который не охватывается теоремами 5 и 6.

**Пример 2.** Пусть  $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0, b > 0, \alpha > 1$  и пусть  $a_n \sim (-1)^n a n^\alpha$  и  $b_n \sim b n^\alpha$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда предел в неравенстве (12) равен  $2b^2/(a^2 + 2b^2)$  и меньше 1. Следовательно, оператор  $L$ , порождённый матрицей  $J$  самосопряжён. Отметим, что если  $a_n = 0$ , то при условии  $b_n \sim b n^\alpha$ ,  $n \rightarrow \infty$  индексы дефекта оператора  $L$  могут быть как  $(0, 0)$  так и  $(1, 1)$  (подробнее см. [7, §1, п.3, пример 2]).

Авторы благодарят профессора А.А. Шкаликова за проявленный интерес к работе и полезные замечания.

## Список литературы

1. Крейн М.Г. Бесконечные  $J$  - матрицы и матричная проблема моментов // ДАН СССР, 1949, 69, №3, 125-128.
2. Крейн М.Г. Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта  $(m, m)$  // Укр. матем. ж., 1949, №2, 3-66.
3. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряжённых операторов. Наукова думка, Киев, 1965.
4. Коган В.И. Об операторах, порождённых  $J_p$  - матрицами в случае максимальных индексов дефекта // Теория функций, функц. анализ и их прилож. 1970, 11, 103-107.
5. Дюкарев Ю.М. Примеры блочных матриц Якоби, порождающих симметрические операторы с любыми возможными дефектными числами // Математический сборник, 2010, Т.201, №12, 83-92.



6. Костюченко А.Г., Мирзоев К.А. Трёхчленные рекуррентные соотношения с матричными коэффициентами. Вполне неопределённый случай // Математические заметки, 1998, Т. 63, Выпуск 5, 709–716.
7. Костюченко А.Г., Мирзоев К.А. Обобщённые якобиевы матрицы и индексы дефекта обыкновенных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами // Функциональный анализ и его приложения, 1999, Т. 33, Выпуск 1, 30–45.
8. Nagy B. Multiplicities, generalized Jacobi matrices and symmetric operators // J. Operator Theory, 65:1, 2011, 211–232.
9. Чистяков А. Л. Индексы дефектов симметрических операторов в прямой сумме гильбертовых пространств. I. // Вестник МГУ, 1969, сер. матем. мех., №3, 5–21.
10. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов. Физматлит, М., 1961.
11. Petropoulou E. N. , Velazquez L. Self-adjointness of unbounded tridiagonal operators and spectra of their finite truncations // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2014, V. 420(1), 852–872.

Бройтигам И.Н.,  
 САФУ имени М.В. Ломоносова,  
 Набережная Северной Двины, 17,  
 163002, г. Архангельск, Россия,  
 e-mail:irinadolgi@rambler.ru

Мирзоев К.А.,  
 МГУ имени М.В. Ломоносова,  
 Ленинские Горы, 1,  
 119991, г. Москва, Россия,  
 e-mail:mirzoev.karahan@mail.ru